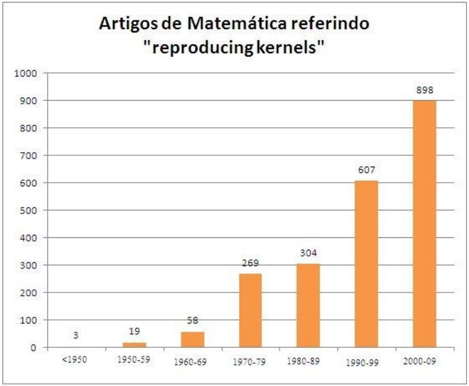
Núcleos Reprodutores em Matemática e Engenharia

Jorge Buescu
FCUL
CMAF

Ciência 2009
30 de Julho de 2009

Artigos sobre Reproducing Kernels



1950: N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, TAMS **68**, 3, 337-404.

Caracterização de RKHS's

Definição (Matriz de Moore)

Seja $E \neq \emptyset$. $K : E \times E \to C$ é uma matriz de Moore se

$$\sum_{i,j} K(x_i, x_j)\xi_i \overline{\xi_j} \geq 0 \quad \forall x_i, x_j \in E, \xi_i \xi_j \in \mathbb{C}.$$

Definição (RKHS)

Seja $E \neq \emptyset$ e $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert de funções em E.
$K : E \times E \to \mathbb{C}$ diz-se um *núcleo reprodutor em* $\mathcal{H}$ se

$$\forall y \in E \ K(x, y) \in \mathcal{H} \text{ como função de } x, \tag{0.1}$$

$$\forall y \in E \ \forall f \in \mathcal{H} \quad f(y) = \langle f(x), K(x, y) \rangle. \tag{0.2}$$

Exemplos

Teorema (Moore-Aronszajn)

K é uma matriz de Moore em E se e só se existe um único espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de funções de E tal que K é um núcleo reprodutor em $\mathcal{H}$.

Exemplos

Teorema (Moore-Aronszajn)

K é uma matriz de Moore em E se e só se existe um único espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de funções de E tal que K é um núcleo reprodutor em $\mathcal{H}$.

E: espaço "físico"; $\mathcal{H}$: RKHS.

Exemplos

Teorema (Moore-Aronszajn)

K é uma matriz de Moore em E se e só se existe um único espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de funções de E tal que K é um núcleo reprodutor em $\mathcal{H}$.

E: espaço "físico"; $\mathcal{H}$: RKHS.

E	$\mathcal{H}$	K
$\{1, 2, \ldots, n\}$	$\mathbb{C}^n$	M matriz SDP
$I \subset \mathbb{R}$	$l^2(\mathbb{R})$	núcleo integral de Mercer
$\Omega \subset \mathbb{C}^n$	$A^2(\Omega)$	Bergman, Szegö, Hardy...

(Principais) Áreas de aplicação

1. EDPs (Bergman e Schiffer; eqs elípticas em geral)
2. Aplicações conformes (Bergman, Nehari)
3. Processos gaussianos
4. Análise harmónica em semigrupos (FDP)
5. Noção de hipergrupo e análise harmónica em hipergrupos
6. Teoria de Operadores (de Branges, Rovnyak, Arov)
7. Problemas inversos (Arov, Dym)
8. Polinómios ortogonais (fórmulas de Christoffel-Darboux)
9. Problemas de contagem de zeros
10. Sistemas dissipativos lineares

(Principais) Áreas de aplicação II

11 O algoritmo de Schur (Dym, Alpay)

12 Interpolação (Nevanlinna-Pick, Carathéodory-Fej ´er)

13 Desigualdades (Ando, Saitoh)

14 Transformações integrais (Saitoh)

15 Funções de SCV (Arazy, Hua)

16 Bases de exponenciais em $L^2(I)$ e teoria de controlo (Nikoslki).

17 Aproximação em RKHS e funções de spline

18 Reconhecimento de padrões,aprendizagem automática, SVM (support vector machines) (V. Vapnik, G. Wahba)

Machine Learning: o "kernel trick"

Proposição (Krein, Saitoh...)

Um RK $K(x,y)$ admite uma representação no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$

$$K(x,y) = \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle_{\mathcal{H}}. \tag{0.3}$$

Esta representação aplica-se a qualquer algoritmo que depende apenas do p.i. entre dois vectores. Quando surge um p.i. entre vectores, utiliza-se o valor correspondente do núcleo $K(x_i, x_j)$.

Machine Learning: o "kernel trick"

Proposição (Krein, Saitoh...)

Um RK $K(x, y)$ admite uma representação no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$

$$K(x, y) = \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle_{\mathcal{H}}. \tag{0.3}$$

Esta representação aplica-se a qualquer algoritmo que depende apenas do p.i. entre dois vectores. Quando surge um p.i. entre vectores, utiliza-se o valor correspondente do núcleo $K(x_i, x_j)$. Transformamos assim um algoritmo linear num algoritmo não-linear!

Machine Learning: o “kernel trick”

Proposição (Krein, Saitoh...)

Um RK $K(x, y)$ admite uma representação no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$

$$K(x, y) = \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle_{\mathcal{H}}. \tag{0.3}$$

Esta representação aplica-se a qualquer algoritmo que depende apenas do p.i. entre dois vectores. Quando surge um p.i. entre vectores, utiliza-se o valor correspondente do núcleo $K(x_i, x_j)$. Transformamos assim um algoritmo linear num algoritmo não-linear!

A aplicação φ chama-se *feature map*. A parte notável de (0.3) é que permite proceder sem conhecer *a priori* o feature map ou sequer o *feature space*.

RKs e *Machine Learning* II

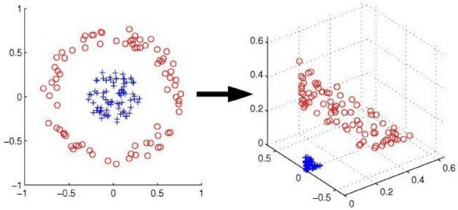


Figure 1: Transforming the data can make it linearly separable

RKs e *Machine Learning* II

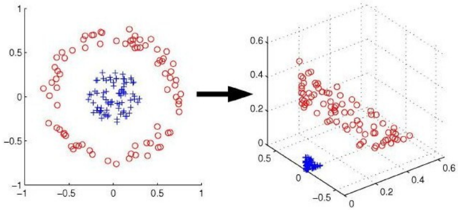


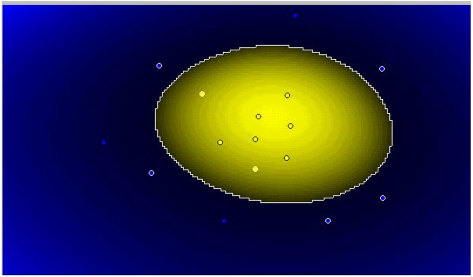
Figure 1: Transforming the data can make it linearly separable

O kernel trick é utilizado em inúmeras áreas da aprendizagem automática (algorítmica):

1. SVM (Support Vector Machines)
2. Análise de componentes principais
3. Análise de correlações
4. Clustering...

Reconhecimento de padrões via SVM

Reconhecimento de padrões (voz, imagem, etc).



e.g. following applet
RH University of London
http://svm.dcs.rhbnc.ac.uk/pagesnew/GPat.shtml

RK na indústria: a YDreams

YVision

YVision mathematics

- 3D Rendering: Linear Algebra - Differential Geometry - Geometry (Projective Transformations)
- Physics Simulation: Linear Algebra - Differential Calculus - Integral Calculus - Numerical Analysis (for approximating continuous mathematics)
- Computer Vision: Linear Algebra - Geometry (Homographies, Projective Transformations) - Cellular Automata - Convolutions - Fourier Analysis
- Synthesis and Transform Audio: Fourier Analysis, Synthesis and Transform
- Machine Learning: Statistical Analysis - Artificial Neural Networks - Principal Component Analysis - Regression - Function Approximation
- Evolutionary Computation Core Framework: Lambda Calculus (root of functional programming) - Turing Machines - Theory of Computation