



# Atractores de Equações de Reacção-Difusão

Carlos Rocha, IST

Centro de Análise Matemática, Geometria e Sistemas Dinâmicos

Encontro Nacional de Ciência - CIÊNCIA 2009

Equações de reacção-difusão surgem como modelos particularmente úteis em processos Físicos, Químicos, Biológicos, Ambientais e mesmo Sociais.

$$\partial_t U = \Delta U + F(U)$$

$$U = U(t, x) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad , \quad x \in \Omega$$

$$B(x, U) = 0 \quad , \quad x \in \partial\Omega$$

Equações de reacção-difusão surgem como modelos particularmente úteis em processos Físicos, Químicos, Biológicos, Ambientais e mesmo Sociais.

$$\partial_t U = \Delta U + F(U)$$

$$U = U(t, x) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad , \quad x \in \Omega$$

$$B(x, U) = 0 \quad , \quad x \in \partial\Omega$$

\* \* \*

Descrição da evolução das concentrações  $U$  sob a influência de dois processos

- difusão espacial,  $\Delta$
- reacções locais,  $F$

Nos últimos 20 anos têm sido desenvolvidos esforços para integrar este tipo de problemas na linguagem dos sistemas dinâmicos com o objectivo de obter a descrição da evolução temporal global da solução.

Nos últimos 20 anos têm sido desenvolvidos esforços para integrar este tipo de problemas na linguagem dos sistemas dinâmicos com o objectivo de obter a descrição da evolução temporal global da solução.

As equações dadas geram um sistema dinâmico  $T(\cdot) : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  num espaço de funções  $X = W^{s,p}(\Omega)$  adequado ao contexto das equações diferenciais parciais:

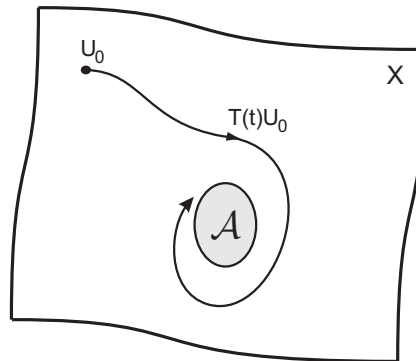
$$T(t)U_0(x) = U(t, x) \quad , \quad U_0(x) = U(0, x) \in X$$

Nos últimos 20 anos têm sido desenvolvidos esforços para integrar este tipo de problemas na linguagem dos sistemas dinâmicos com o objectivo de obter a descrição da evolução temporal global da solução.

As equações dadas geram um sistema dinâmico  $T(\cdot) : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  num espaço de funções  $X = W^{s,p}(\Omega)$  adequado ao contexto das equações diferenciais parciais:

$$T(t)U_0(x) = U(t, x) \quad , \quad U_0(x) = U(0, x) \in X$$

O comportamento assintótico das soluções encontra-se inteiramente representado no conjunto *attractor global*  $\mathcal{A} \subset X$ .



Um caso particularmente feliz diz respeito ao problema:

- $\dim \Omega = 1$  ,  $B = \partial_\nu$

$$u_t = u_{xx} + f(x, u, u_x)$$

$$\Omega = (0, \pi) \subset \mathbb{R} \quad , \quad u_x(0) = u_x(\pi) = 0$$

Um caso particularmente feliz diz respeito ao problema:

- $\dim \Omega = 1$  ,  $B = \partial_\nu$

$$u_t = u_{xx} + f(x, u, u_x)$$

$$\Omega = (0, \pi) \subset \mathbb{R} \quad , \quad u_x(0) = u_x(\pi) = 0$$

Neste caso o problema é bem posto (propriedade de *Morse-Smale*):

- genericamente o atractor global contem um número finito de soluções de equilíbrio  $u_j = u_j(x)$  hiperbólicas;
- os pontos de equilíbrio e as suas variedades invariantes dependem continuamente dos parâmetros do problema;
- as variedades invariantes estáveis e instáveis dos pontos de equilíbrio intersectam-se transversalmente.



Um caso particularmente feliz diz respeito ao problema:

- $\dim \Omega = 1$  ,  $B = \partial_\nu$

$$u_t = u_{xx} + f(x, u, u_x)$$

$$\Omega = (0, \pi) \subset \mathbb{R} \quad , \quad u_x(0) = u_x(\pi) = 0$$

Neste caso o problema é bem posto (propriedade de *Morse-Smale*):

- genericamente o atrator global contém um número finito de soluções de equilíbrio  $u_j = u_j(x)$  hiperbólicas;
- os pontos de equilíbrio e as suas variedades invariantes dependem continuamente dos parâmetros do problema;
- as variedades invariantes estáveis e instáveis dos pontos de equilíbrio intersectam-se transversalmente.

O atrator global  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_f$  é estruturalmente estável

$$\mathcal{A} = \bigcup_j W^u(u_j)$$

Caracterização das dinâmicas  $\leftrightarrow$  Classificação dos atratores

Caracterização das dinâmicas  $\leftrightarrow$  Classificação dos atratores

*Problema Modelo:*  $f_\lambda(u) = \lambda u - u^3$  Chafee–Infante '74

$$u_t = u_{xx} + \lambda u - u^3 \quad , \quad 0 < x < \pi \quad , \quad u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0$$

Caracterização das dinâmicas ↔ Classificação dos atratores

*Problema Modelo:*  $f_\lambda(u) = \lambda u - u^3$  Chafee–Infante '74

$$u_t = u_{xx} + \lambda u - u^3, \quad 0 < x < \pi, \quad u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0$$

Soluções de equilíbrio,  $u_{xx} + \lambda u - u^3 = 0$  :

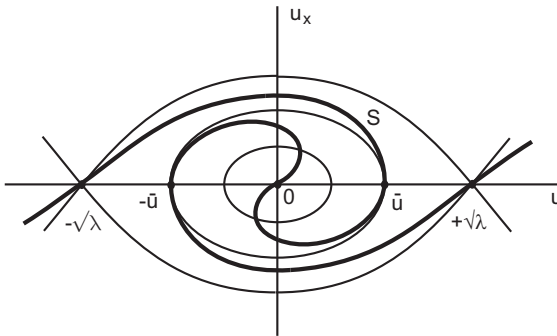
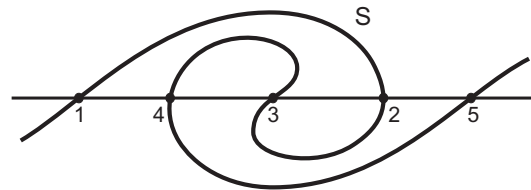


Diagrama no plano  
de fase  $(u, u_x)$



Meandro  $S$  e  
Permutação de Sturm

$$\sigma_\lambda = \{1 \ 4 \ 3 \ 2 \ 5\}$$

# Atractores de Chafee-Infante

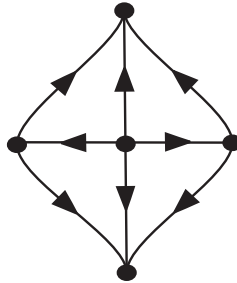
$\lambda < 0$



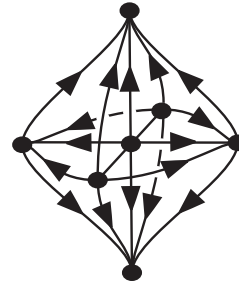
$0 < \lambda < 1$



$1 < \lambda < 4$



$4 < \lambda < 9$

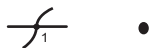


$n^2 < \lambda < (n+1)^2$

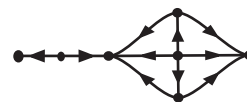
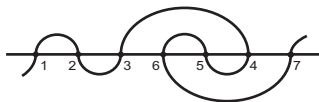


# Lista de atratores com $n \leq 7$ equilíbrios:

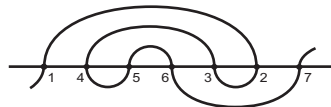
n=1



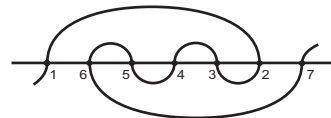
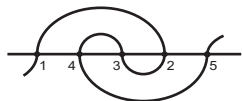
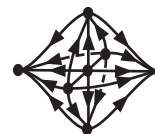
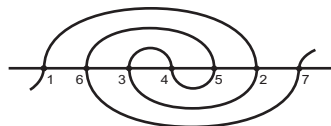
n=7



n=3



n=5

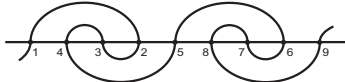


# Permutações de Sturm com $n = 9$ :

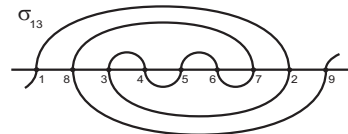
$\sigma_1$



$\sigma_7$



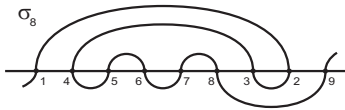
$\sigma_{13}$



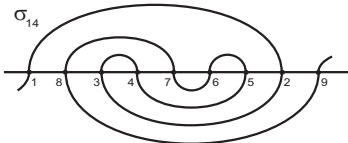
$\sigma_2$



$\sigma_8$



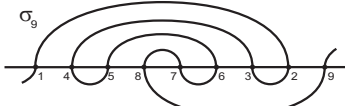
$\sigma_{14}$



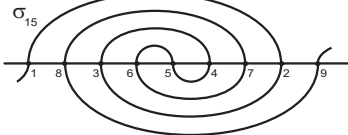
$\sigma_3$



$\sigma_9$



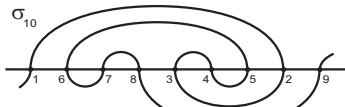
$\sigma_{15}$



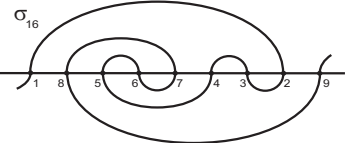
$\sigma_4$



$\sigma_{10}$



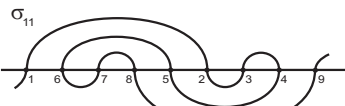
$\sigma_{16}$



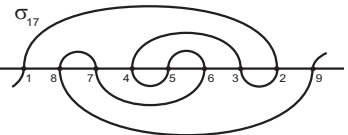
$\sigma_5$



$\sigma_{11}$



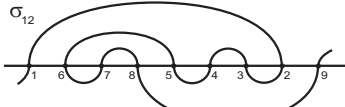
$\sigma_{17}$



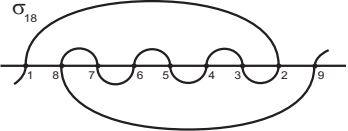
$\sigma_6$



$\sigma_{12}$



$\sigma_{18}$



Os problemas anteriores possuem uma estrutura variacional:

$$\partial_t u = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} \quad , \quad \mathcal{L} = \int_{\Omega} \Phi(x, u, u_x) dx \quad ,$$

da qual resulta a simplicidade do atrator  $\mathcal{A}$  que não possui órbitas periódicas.



Os problemas anteriores possuem uma estrutura variacional:

$$\partial_t u = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} \quad , \quad \mathcal{L} = \int_{\Omega} \Phi(x, u, u_x) dx \quad ,$$

da qual resulta a simplicidade do atrator  $\mathcal{A}$  que não possui órbitas periódicas.

Tal não é, em geral, o caso quando  $\dim \Omega > 1$ . No entanto, resultados recentes permitiram obter a estrutura do atrator  $\mathcal{A}$  em problemas da forma

- $\Omega = S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

$$u_t = u_{xx} + f(u, u_x) \quad , \quad x \in S^1 \quad .$$

Os problemas anteriores possuem uma estrutura variacional:

$$\partial_t u = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} \quad , \quad \mathcal{L} = \int_{\Omega} \Phi(x, u, u_x) dx \quad ,$$

da qual resulta a simplicidade do atrator  $\mathcal{A}$  que não possui órbitas periódicas.

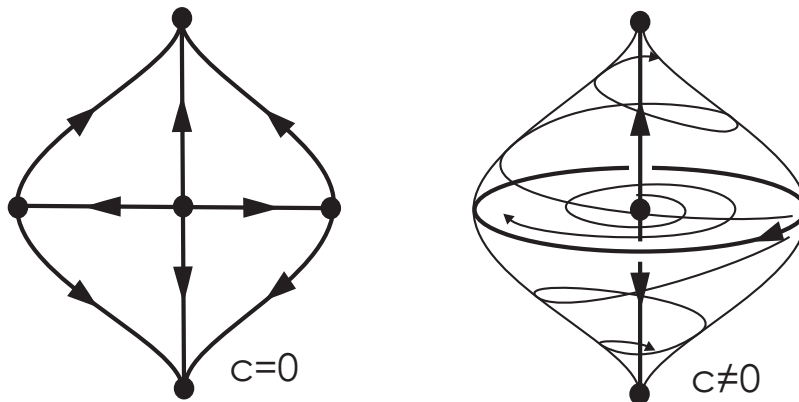
Tal não é, em geral, o caso quando  $\dim \Omega > 1$ . No entanto, resultados recentes permitiram obter a estrutura do atrator  $\mathcal{A}$  em problemas da forma

- $\Omega = S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

$$u_t = u_{xx} + f(u, u_x) \quad , \quad x \in S^1 \quad .$$

O problema é igualmente bem posto (genericamente Morse-Smale) e a classificação dos atratores obtem-se a partir das permutações de Sturm.

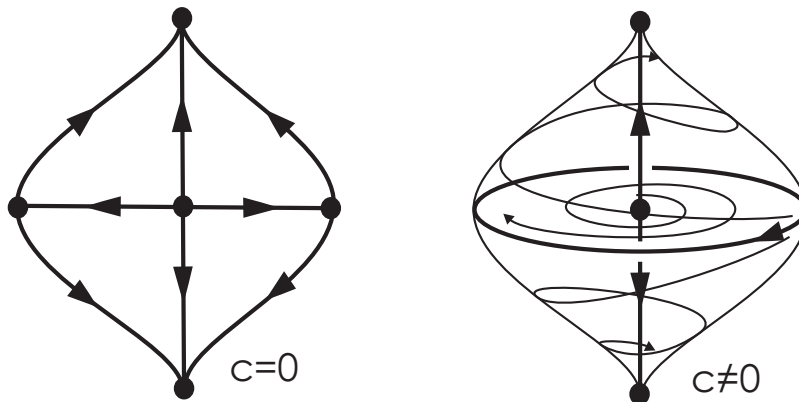
Atrator de Morse-Smale com 3 equilíbrios e 1 órbita periódica:



$$\dim \mathcal{A} = 3$$

$$u_t = u_{xx} + \lambda u - u^3 + cu_x, \quad 1 < \lambda < 4$$

Atrator de Morse-Smale com 3 equilíbrios e 1 órbita periódica:



$$\dim \mathcal{A} = 3$$

$$u_t = u_{xx} + \lambda u - u^3 + cu_x, \quad 1 < \lambda < 4$$

No caso geral  $f = f(x, u, u_x)$  o problema é genericamente Morse-Smale, mas a estrutura do atrator é ainda um problema em aberto.