Programação quadrática: novas aproximações convexas

João Xavier

Instituto Sistemas e Robótica – Instituto Superior Técnico

- Programação quadrática:

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & x^\top A_0 x \\
\text{sujeito a} & x^\top A_1 x = b_1 \\
& \vdots \\
& x^\top A_k x = b_k \\
& x \in \mathbb{R}^n
\end{array}
$$

- **Imensas** aplicações em engenharia !

- NP-difícil

Estado da arte:

- $k = 2$: existe reformulação convexa
- $k \geq 3$: existe **aproximação** convexa

Hoje:

- $k = 3$, caso particular: existe **nova aproximação*** convexa
- Primeiras aplicações em engenharia

Caso particular:

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & x^\top A_0 x \\
\text{sujeito a} & x^\top \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = 1 \\
& x^\top \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} x = 1 \\
& x^\top \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ I_3 & 0 \end{bmatrix} x = 0 \\
& x \in \mathbb{R}^6
\end{array}
$$

Interpretação: problema quadrático sobre a variedade Stiefel

$$
\mathsf{O}(3,2) = \left\{ Q \in \mathbb{R}^{3\times 2} \,:\, Q^\top Q = I_2 \right\}
$$

Problema equivalente:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \operatorname{tr}(A_0 X) \\ \text{sujeito a} & X \in \operatorname{co} S \\ & X \in \mathbb{R}^{6\times 6} \end{array}$$

$$S = \left\{ qq^\top \,:\, q = \operatorname{vec}(Q) \text{ para algum } Q \in \mathsf{O}(3,2) \right\}$$

Conjectura: co S é o conjunto de matrizes

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{bmatrix}$$

tais que

$$X \succeq 0,\ \mathrm{tr}(A) = 1,\ \mathrm{tr}(C) = 1,\ \mathrm{tr}(B) = 0$$

e

$$\begin{bmatrix} I - A - C & \beta \\ \beta^\top & 1 \end{bmatrix} \succeq 0 \quad \beta = \begin{bmatrix} B_{23} - B_{32} \\ B_{31} - B_{13} \\ B_{21} - B_{12} \end{bmatrix}$$

Em colaboração com: M. Stosic and M. Dodig

Aplicação: reconstrução 3D de objecto rígido

- Problema:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \|A - BQ\|^2 \\ \text{sujeito a} & Q \in \mathsf{O}(3,2) \end{array}$$

- **Nova aproximação** convexa:
  - Reformulação:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & -\sqrt{\mathrm{tr}(CX)} + \mathrm{tr}(DX) \\ \text{sujeito a} & X \in S \end{array}$$

  - Aproximação:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & -\sqrt{\mathrm{tr}(CX)} + \mathrm{tr}(DX) \\ \text{sujeito a} & X \in \mathrm{co}\, S \end{array}$$

Resultados: probabilidade de gerar minimizante global

	Aproximação usual	**Nova aproximação**
$A, B \sim \mathcal{N}(0,1)$	51%	**100%**
$A, B \sim$ uniforme $[-1,1]$	58%	**100%**
$A, B \sim$ Bernoulli $\{-1,1\}$	59%	**100%**

Aplicação: reconstrução 3D de objecto deformável

- Problema:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \text{vec}(Q)^\top A \text{vec}(Q) \\ \text{sujeito a} & Q \in \mathsf{O}(3,2) \end{array}$$

- **Nova aproximação** convexa:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \text{tr}(AX) \\ \text{sujeito a} & X \in \text{co}\, S \end{array}$$

Em colaboração com: Alessio del Bue *et al.*

Resultados: probabilidade de gerar minimizante global

	Aproximação usual	**Nova aproximação**
$A \sim \mathcal{N}(0, 1)$	74%	**100%**
$A \sim$ uniforme $[-1, 1]$	77%	**100%**
$A \sim$ Bernoulli $\{-1, 1\}$	77%	**100%**

Aplicação: projecção nas matrizes essenciais

- Problema:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \|A - LQ\|^2 \\ \text{sujeito a} & L : \text{triangular superior} \\ & L(1,2) = 0 \\ & Q \in \mathsf{O}(3) \end{array}$$

- **Nova aproximação** convexa:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \mathrm{tr}(BX) \\ \text{sujeito a} & X \in \mathrm{co}\, S \end{array}$$

Em colaboração com: José Gaspar

Resultados: probabilidade de gerar minimizante global

	Aproximação usual	**Nova aproximação**
$A_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$	72%	**100%**
$A_0 \sim$ uniforme $[-1,1]$	76%	**100%**
$A_0 \sim$ Bernoulli $\{-1,1\}$	78%	**100%**

Questão relacionada: $F(B)$ é um conjunto convexo ?

- $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $F(x) = \left(x^\top A_1 x, \ldots, x^\top A_k x\right)$
- $B = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x^\top B_1 x = c_1, \ldots, x^\top B_m x = c_m\right\}$

Estado da arte:

- $k = 2$, $m = 1$: sim

Imensas aplicações em engenharia !